Andreas Schulz

Kinder auf dem Weg ins Zehnersystem

Zwei, Zwölf, Zweiundzwanzig, Zweiunddreißig … - Liebe Leserin, versuchen Sie einmal aufzulisten, was diese Zahlwörter verbindet und was sie unterscheidet.

Jamila, zweite Klasse, hatte von ihrer Lehrerin die gleiche Frage gestellt bekommen. Und Jamila grübelte lange darüber. „Zwei und Zwölf – das sind zwei Zahlen. Zwei, drei, vier, fünf, sechs, sieben, acht, neun, zehn, elf, zwölf.“ Sie zählt an den Fingern mit. „Zehn weiter, dann habe ich Zwölf.“

Jamila gibt hier durchaus eine richtige Antwort. Aber was wäre, wenn Jamila auch in Klasse 3 wenig mehr darauf zu antworten weiß als durchzuzählen, um dann zehn als Unterschied benennen zu können? Was also, wenn die Aspekte, die Sie vermutlich als Gemeinsamkeiten und Unterschiede benannt haben, nicht gesehen werden? Aspekte wie:

- Es gibt einen Unterschied im vollen Zehner, an der Zehnerstelle.
- Es findet eine schrittweise Vergrößerung im Zahlenraum um einen Zehnersprung statt.
- Jede der Zahlen größer Zehn zergliedert sich in einen Einer und einen oder mehrere Zehner.
- Eine Zahl größer Zwölf wird in der Weise gesprochen, dass erst die Einerstelle und dann die Zehner benannt werden, wobei die Zehner sich dadurch kennzeichnen, dass sie sprachlich auf -ig enden.
- …

Wenn man sich mit Kindern auseinandersetzt, die gravierende Rechenschwierigkeiten zeigen, also eine hohe Fehleranzahl beim Addieren und Subtrahieren zeigen, fällt bei vielen auf, dass sie diese Aufgaben wie Jamila zählend in Einerschritten bewältigen. Es fehlt eine Einsicht in Strukturzusammenhänge. 3+2 und 3+22 werden also z. B. als grundlegend verschiedene Aufgaben aufgefasst, wobei bei der ersten Aufgabe zwei Zählschritte von der Drei ab zu gehen sind, und 22 Zählschritte bei der zweiten Aufgabe. Eine solche Vorgehensweise ist kognitiv sehr ressourcenintensiv und birgt dabei die Gefahr des Verzählens. So vertun sich einige Kinder um Eins, weil sie von der Drei ab 22 Schritte weiterzählen, dabei aber die Drei schon als ersten Dazuzähl-Schritt ansehen.

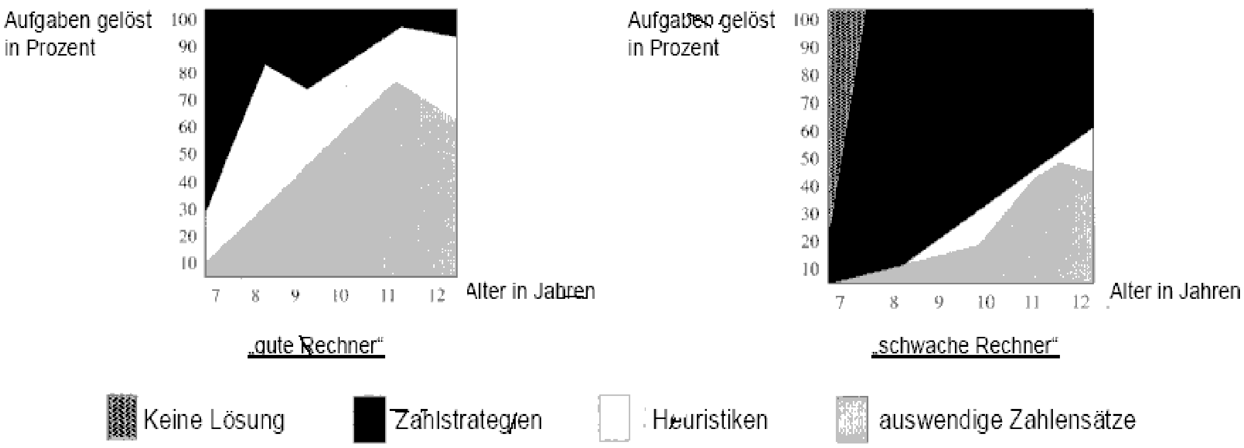
Grund ist zumeist eine fehlende Einsicht in den Zahlbegriff mit seinen Zahlzerlegungen und dem Verständnis der Kardinalität von Zahlen (also: eine Zahl beschreibt eine Anzahl), die sich auch in der Zehnerbündelung ausdrücken kann: Zehn bedeutet, ich fasse zehn Einer zu einem Zehner zusammen. Wir können also im Stellenwertsystem 0 bis 9 Einer benennen und wir können 0 bis 9 volle Zehner haben. Voraussetzung für diese Einsicht ist, den Zahlbegriff bis 10 begriffen zu haben.

Eine solche Zahlbegriffsschwäche, die zählende Rechner aufweisen, ist nach Grissemann und Weber (1996, 15f.) eine Ursache für fingerfixiertes Rechnen, also ein »ungebührlich lange Zeit« an Fingern als Rechenhilfe gebundenes Rechnen (Lobeck, 1992, 68), das sich als resistent »gegen jegliches Lehrerbemühen« erweist (Lorenz, 1989, 8). Moog (1993) ermittelte so auch einen hoch signifikanten Zusammenhang zwischen der Additionsleistung und der Abhängigkeit von Anschauungshilfen, zu der das Fingerrechnen neben dem Abzählen an konkreten Elementen gehört. Eine Folgeuntersuchung replizierte dieses Ergebnis (Schulz, van Bebber & Moog, 1998): In der Gruppe mit wenig Fehlern bei der Addition befanden sich auch signifikant weniger anschauungsgebundene Rechner als in der leistungsschwächeren Gruppe mit vielen Fehlern. Diese Kinder zeigen demnach Lernprobleme im Übergang zum internen Operieren. Das Rechnen bleibt hier auf dem Niveau des Zählvorgangs an konkreten Objekten stehen.

Zwar überwinden aus dieser Gruppe viele Kinder mit dem Alter den offensichtlichen Fingergebrauch (zum Teil aus Scham), es bleibt jedoch beim Einerschritt-Durchzählen der Aufgaben.

Dieses zählende Rechnen erweist sich dann spätestens im Zahlenraum bis 100 als sehr mühsam und fehleranfällig. Eine Untersuchung von Gray (1991) zeigt, dass die leistungsstärkeren Schüler das zählende Rechnen so auch allmählich in den ersten Schuljahren durch heuristische Strategien (z. B. über die Zahlzerlegung Ergebnisse über den Zehner zu rechnen) und Auswendigwissen ablösen. Bei den leistungsschwächeren Schülern hingegen dominiert weiterhin das zählende Rechnen, heuristische Strategien werden von ihnen kaum entdeckt und angewendet.

Abb.. 1: Lösungswege bei Addition/ Subtraktion im Zahlenraum bis 20 (nach Gray 1991)



Wie aber führt man sie davon weg? Wenn wir uns mit dieser Frage beschäftigen wollen, dann ist es wichtig sich vor Augen zu führen, mit welcher Schülergruppe wir uns beschäftigen. Es geht hierbei um Kinder, die im Vergleich zu ihren Mitschülern beim Addieren und Subtrahieren weniger Aufgaben schaffen und mehr Fehler dabei zeigen. Um überhaupt Lösungen zu erhalten, rechnen sie zählend. Es geht also nicht darum, den mathematischen Anfangsunterricht zu konzipieren, um präventiv einen zählenden Zugang zu vermeiden, sondern sich mit den Schülern zu beschäftigen, die sich bereits kompensatorisch mühen, indem sie zählen.

Diesen Schülern Hilfestellung anzubieten, bedeutet ihre zählende Arbeitsweise aufzugreifen, um sie davon wegführen zu können. Es bedeutet nicht, das Zählen ersatzlos zu verbieten, sondern das zählende Rechnen zunächst zu systematisieren, um dann eine Ablösung davon anzubahnen. Der Einsatz geeigneter Veranschaulichungsmittel dient dabei dem Ziel, eine solche Systematisierung zu erwirken. Die Veranschaulichungsmittel dienen nun dazu, den „kindlichen Ablösungsprozess vom zählenden Rechnen zu unterstützen“ (Radatz, u. a., 1996, S. 40).

Mit dieser Formulierung wird vor allem eins betont:
Die Ablösung kann nur vom Kind geleistet werden. Das Veranschaulichungsmittel, das es

unter Anleitung des Lehrers verwendet, kann es nur dabei unterstützen. Unterstützung bedeutet in diesem Fall, dass das Arbeitsmittel dem Kind eine Alternative bietet. Es soll die Einsicht gewinnen, dass man mit dessen Hilfe sicher und flink ohne Zählen rechnen kann.

Somit sollte dieses Arbeitsmittel also zur Systematisierung des Zahlaufbaus beitragen:

- Einzelne zählbare Einheiten müssen am Arbeitsmittel erkennbar sein, damit zunächst auch zählendes Rechnen ermöglicht wird. Die bisherigen Erfahrungen der Kinder beruhen in der Regel auf einem Abzählen an den Fingern. Lässt nun das Arbeitsmittel zählendes Rechnen zu, so ermöglicht es allen Schülern, ihr Vorwissen einzubringen und eigene Strategien zunächst beizubehalten bzw. zu korrigieren. Nur so kann im Kind eine positive Grundeinstellung zum Arbeitsmittel aufgebaut werden, welche die Voraussetzung für die Übernahme der Strukturen ist.
- Anzahlen bis 5 müssen auf dem Arbeitsmittel simultan erfasst werden können.
- Eine Zehnerstrukturierung sollte durch das Arbeitsmittel möglich sein, da unser Zahlsystem ein dekadisches Stellenwertsystem ist. Das Arbeitsmittel sollte es ermöglichen, dass der Zehner ohne Zählen als Ganzheit wahrgenommen wird. So können auch die Anzahlen 9 (eins weniger 10) und 8 (zwei weniger 10) aber auch 29 (eins weniger 30) quasi-simultan erfasst werden.

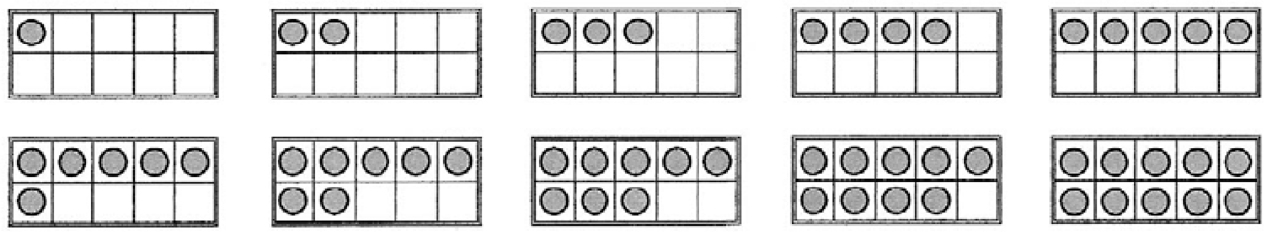
Bei den Anzahlen 6 und 7 muss jedoch gezählt werden, da ihr Bezug zur 10 nicht mehr offensichtlich und augenscheinlich ist. Deshalb bietet sich eine weitere Unterteilung nach 5 an. Krauthausen spricht von der „Kraft der 5“ (Krauthausen, 1995, S. 87)

Welche Vorteile bietet die 5?

- Größere Anzahlen können quasi-simultan erfasst werden, z.B. 6 = 5 + 1; 7 = 5 + 2 aber auch 73 = 50 + 20 + 3. Deshalb sollte eine Unterteilung jeweils nach 5 Einzelnen, aber auch nach 50 getroffen werden.
- Die Zahlzerlegungen können auf die 5 bezogen werden.
- Die Fünferstruktur ist auch auf größere Zahlenräume übertragbar.

Im strukturierten Zehnerfeld wird mit einer zweimal Fünf-Aufteilung diesen Argumenten Rechnung getragen:

Abb. 2: Die Zahlen bis 10 im strukturierten Zehnerfeld



Gerade für die Einsicht in das Zehnersystem, welches ein maximales Befüllen der Felder bedeutet, ist diese Darstellungsweise vorteilhaft. Zudem ist für jede Zahl bis fünf ersichtlich, wie viel noch bis Fünf und bei Zahlen größer Fünf, wie viele bis zur zehn ergänzbar sind. Auch auf konkreter Ebene gibt es hierfür Material:

Mit dem Modell der Kutzer-Rechenzüge wird den Schülern auch auf konkret-manipulativer Ebene verdeutlicht, was ein voller Zehner bedeutet (nämlich ein voller Waggon) und warum es dann auch Sinn macht, eine neue Stelle anzufangen, also 1 Zehner und 0 Einer, d. h. 10.

Abb. 3: Die Rechenzüge (Kutzer, 2001)

In dieser Aufgabenstellung (siehe Abb.3) geht es um stellenüberschreitendes Rechnen mit der Anzahlergänzung bis zum vollen Zehner. Also: 8+5 = 8+2 + 3 = 10 + 3 = 13.

Sicherlich verleitet die Sichtbarkeit der zehn Einer weiterhin zum Abzählen. Dem kann man aber im nächsten Schritt mit einem ähnlichem Modell, dem Zehner-Eierkarton, entgegenwirken: Ist ein Zehner voll, dann wird er als Zehner abgeschlossen, indem der Deckel des Eierkartons geschlossen wird. Ist also ein geschlossener Eierkarton vorhanden, dann sind dort zehn Einer enthalten, die man sich vorstellen muss.

Abb. 4: Eierkarton als voller Zehner

So lassen sich damit auch Fragen mit dem Schüler erörtern wie: „Zwei einzelne Eier und drei geschlossene Eierkartons, sind das 23 oder 32 oder 5?“ Dabei ist dann nicht nur zu klären, welche Antwort richtig ist, sondern auch, warum die anderen falsch sind. Gerade durch das gemeinsame Nachdenken und Argumentieren anhand von geeignetem Material wird eine Einsicht in das Stellenwertsystem und der Zahlsprech- und -schreibweise vermittelt.

Die Strukturierung, die mit diesem oder anderen geeignetem Material vorgegeben wird, ist also eine wichtige Voraussetzung dafür, dass das Kind vom zählenden Rechnen weggeführt wird und in ihm geeignete visuelle Vorstellungsbilder entstehen. „Hilfe können nur die Arbeitsmittel und Veranschaulichungen bieten, die die mathematische Struktur möglichst klar widerspiegeln, also der Vorstellung nützlich sind und zum Aufbau mentaler Bilder beitragen.“ (Scherer, 1995, S. 409).

Fünfer- und Zehnerstrukturierung sind demnach Zielsetzungen, die mit dem Einsatz von Veranschaulichungsmitteln angebahnt werden sollen. Es ist das Arbeiten mit den Darstellungsmitteln, das unter Anleitung die Schüler vom zunächst noch zählendem Zugang zum Rechnen zu ökonomischeren Verfahren führen soll.

- Beispiel: 17 + 8 =
  Statt nun acht einzelne Schritte von der 17 aus weiterzugehen, ist es hilfreich zu erkennen, dass wir einen vollen Zehner haben und eines Sieben, zu denen ein Achter kommen soll. Füge ich von den Acht drei dazu, dann bekomme ich einen weiteren Zehner. Es verbleiben von den Acht noch fünf, die zu den jetzt zwei Zehnern dazukommen. Also ist das Ergebnis 25.
  Das Argument, dieses Vorgehen sei doch komplexer als in Einerschritten weiter zu gehen, verkennt, dass es klar an Vorteil gewinnt, wenn der zweite Summand nicht Acht sondern z. B. 57 heißt.

Das bedeutet, die Arbeit mit strukturiertem Material mit Zehnersystem soll in diesem Fall die Vorstellung eines schrittweisen Rechenprozesses unterstützen. Dabei ist es aber eine Fehleinschätzung, im Material selbst lege die mathematische Einsicht:

> In early mathematics children are faced with not one but two interpretations of their interaction with externally perceived objects. […] For some the dominant focus is on objects and the actions on those objects, others are able to focus more flexibly on the results of those actions expressed as number concepts. The former may seek the security of counting procedures on objects rather than the longer-term development of flexible arithmetic. (Gray, Pitta & Tall, 1999; S. 16/17).

Das bedeutet, in Auseinandersetzung mit Veranschaulichungen erkennen manche Kinder Strukturen, die Ihnen helfen flexible Zahleinsichten zu gewinnen. Andere, leistungsschwächere Kinder arbeiten dagegen am gleichen Material, indem sie sich auf die Sicherheit von Einerschritt-Zählprozessen zurückziehen, das Material entsprechend manipulieren und Strukturen nicht davon abstrahieren. Daher ist es äußerst wichtig, mit sinnvollem Material zu arbeiten, um daran mathematische Inhalte auszuprobieren und darüber zu diskutieren. Es geht um die Beziehungen zwischen Zahlen, deren Erkennen die Kinder aus der Sackgasse des Einerschrittzählens hinausführen. Eine wichtige Basis hierfür ist die Einsicht in die Zehnerbündelung.

Erst die Diskussion der Lösungswege anhand der Veranschaulichungsmittel schafft eine vertiefte Einsicht in mathematische Strukturen. Bei der Ergänzungsaufgabe von der 28 aus hoch bis zur 54 zu zählen, ist dann im Förderprozess vielleicht irgendwann einmal eine Methode, die der Schüler zwar als nicht falsch erkennt, aber eine, die als deutlich komplizierter betrachtet wird, als die Nutzung von Zahlzusammenhängen und der Nutzung von Fünfer- und Zehnerstrukturen.

Zuletzt muss auch die Problematik des Zahlensprechens angesprochen werden: In der Vermittlung des Stellenwertsystems gehört neben der Erkenntnis der Anzahlbündelung als Prinzip der Stellenwertigkeit ebenso das Wissen, dass Zehner-Einer-Zahlen entgegen der Ziffernlesrichtung gesprochen werden. 63 wird als „Dreiundsechzig“ gesprochen, also erst die rechte Ziffer, dann die Linke. Dies kann zu zusätzlichen Verwirrungen führen, wenn Kopfrechenaufgaben notiert werden müssen oder schriftliche Aufgaben im Kopf gelöst und die Antworten gesprochen werden müssen. „Dreiundsechzig plus Siebenundreißig“ wird zu 36+73 und produziert so schon einen Fehler vor dem eigentlichen Rechnen. Es gilt also mit der Einführung in das Stellenwertsystem auch die Zuordnung der Ziffernposition zur Sprechweise zu üben: Erst der Einer, dann der Zehner. Solange man hier im Bereich zweistelliger Zahlen bleibt und darin diese Notation bis zur sicheren Beherrschung übt, kann dieses Vorgehen Missverständnisse vermindern helfen. Weiter geht da der Verein „Zwanzigeins“, deren programmatischer Name schon andeutet, welche Zielsetzung vertreten wird: Eine Zahlensprechreform in Deutschland umzusetzen, nach der Zahlen wie in der englischen Sprechweise gemäß der kulturell verankerten Lesrichtung von links nach rechts gesprochen werden: „Zwanzigeins, zwanzigzwei, zwanzigdrei …“. Eine Sammlung von Argumenten für diese sehr weitgehende Forderung finden Sie unter Gerritzen & Hauenschild (2008).

Zweiundzwanzig und Zweiunddreißig – wenn Jamila aus unserem Eingangsbeispiel ohne Umwege erkennt, dass beide Zahlen sich genau um einen Zehner unterscheiden, wenn sie erkennt, dass Zweiunddreißig die im Vergleich zu Zweiundzwanzig um zehn größere Zahl ist, wenn sie erkennt, dass Zweiunddreißig drei und nicht zwei Zehner umfasst – dann hat Jamila eine Basis, um rechnerisch in Auseinandersetzung / im Erproben und verbalisieren von Rechenwegen mittels strukturierten Zehnerdarstellungen Lösungen zu erarbeiten. Über diesem Wege sind dann flexible Zahleinsichten zu vermitteln. Mit dem vorliegenden Werk sollen diese Inhalte thematisiert werden. Wichtig ist, dass nicht das Arbeitsblatt als solches, sondern die durch Sie angeleitete Auseinandersetzung mit demselben mathematische Einsichten beim Schüler ermöglicht.

Literatur:

Gerritzen, L. & Hauenschild, M. (2008). Zwanzigeins. Für die unverdrehte Zahlensprechweise. Fakten, Argumente, Meinungen. Bochum: Brockmeyer.
Gray, E. M. (1991). An analysis of diverging approaches to simple arithmetic: Preference and its consequences. Educational Studies in Mathematics, 22, 551–574.
Gray, E. M., Pitta, D. & Tall, D. (1999). Objects, actions and images: A perspective in early number development. http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2000b-gray-pitta-jmb.pdf
Grissemann, H. & Weber, A. (1996). Grundlagen und Praxis der Dyskalkulietherapie. 2. Auflage. Bern: Huber.
Krauthausen, G. (1995). Die „Kraft der Fünf“ und das denkende Rechnen - Zur Bedeutung tragfähiger Vorstellungsbilder im mathematischen Anfangsunterricht. In: G. N. Müller/E. C. Wittmann (Hg.): Mit Kindern rechnen, S. 87-108. Bd. 96. Frankfurt/M.: Arbeitskreis Grundschule.
Kutzer, R. (2001). Mathematik entdecken und verstehen. Bd. 2. Frankfurt a. M.: Diesterweg.
Lobeck, A. (1992). Rechenschwäche. Geschichtlicher Rückblick, Theorie und Therapie.

Luzern: Edition SZH.
Lorenz, J.H. (1989). Rechenstörungen früh erkannt und ausgeglichen. Die Grundschule, 12, 33-35.
Moog, W. (1993a). Schwachstellen beim Addieren - Eine Erhebung bei lernbehinderten Sonderschülern. Zeitschrift für Heilpädagogik, 44, 534-554.
Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R. & Ebeling, A. (1996). Handbuch für den Mathematikunterricht 1. Schuljahr. Hannover: Schroedel.
Scherer, P. (1995). Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte. Heidelberg. Schindele.
Schulz, A., van Bebber, N. & Moog, W. (1998). Mathematische Basiskompetenzen lernbehinderter Sonderschüler - Eine Erhebung mit dem Dortmunder Rechentest für die Eingangsstufe. Zeitschrift für Heilpädagogik, 49, 402-411.